1.4. কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ (Measures of central tendency) ঃ

বাৰংবাৰতা তালিকা এখনৰ কিছুমান বৈশিষ্ট্য দেখিবলৈ পোৱা যায়। যেনে ঃ বিভাজনৰ মধ্যভাগত বাৰংবাৰতা আটাইতকৈ বেছি। গতিকে বিভাজনত বেছিকৈ উদ্ভৱ হোৱা মান নিৰ্ণয় কৰি আমি বিভাজন এটাৰ বৈশিষ্ট্য সূচাব পাৰোঁ। বিভাজনৰ এই বৈশিষ্ট্যক কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তি (central tendency) বোলে। এই মাপে বিভাজনত অৱস্থিতিও সূচায়। এনে ধৰণৰ মাপক গড় বা অৱস্থিতিৰ মাপ ও (Average or measures of location) বোলে।

সাধাৰণতে ব্যৱহাৰ কৰা কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপসমূহ ঃ

(1) সমান্তৰ মাধ্য বা মাধ্য (Arithmetic mean or mean)

(2) মধ্যমা (Median)

(3) বহুলক (Mode)

(4) গুণোত্তৰ মাধ্য (Geometric mean)

(5) হৰাত্মক মাধ্য (Harmonic mean)

আমি ইয়াত প্ৰথম তিনিটা মাপ চমুকৈ আলোচনা কৰিম।

সমান্তৰ মাধ্য ঃ কোনো এটা বিষয় অথবা চলকৰ মানসমূহ যদি দিয়া থাকে, মানসমূহ যোগ কৰি পোৱা সংখ্যাটোক, মুঠ মানৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰিলেই আমি সমান্তৰ মাধ্য পাওঁ।

যদি x_1, x_2, x_3, ..., x_n আদি চলকটোৰ মানসমূহ হয়, তেন্তে ইয়াক $\bar{x}$ ৰে সূচিত কৰা হয়।

$$\therefore \text{সমান্তৰ মাধ্য} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

যদি কোনো বাৰংবাৰতা বিভাজনও x_iৰ বাৰংবাৰতা f_i হয়, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$,

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_ix_i \text{ য'ত } \sum_{i=1}^{n} f_i = N.$$

সমান্তৰ মাধ্য উলিওৱাৰ চমু প্ৰণালী ঃ

যেতিয়া x আৰু f ৰ মানবোৰ ডাঙৰ হয়, গণনাৰ সুবিধাৰ্থে,

$$u = \frac{x-a}{h} \text{ ধৰা হয়।}$$

ইয়াত 'a' হ'ল 'x' ৰ মানসমূহৰ মাজৰ মান (assumed mean) আৰু 'h' হ'ল শ্ৰেণীবিলাকৰ সাধাৰণ দৈৰ্ঘ্য

(দৈৰ্ঘ্য বেলেগ বেলেগ হ'লে $h = 1$ হ'ব)

এতিয়া, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$

$$\Rightarrow x_i = a + hu_i$$

$$\Rightarrow f_ix_i = af_i + hu_if_i \text{ (দুয়োফালে } f_i \text{ ৰে পূৰণ কৰি)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_ix_i = \sum_{i=1}^{n} af_i + \sum_{i=1}^{n} hu_if_i$$

(দুয়োফালৰ ৰাশিক 1 ৰ পৰা n লৈ যোগ কৰি)

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_ix_i = \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i + \frac{h}{N}\sum_{i=1}^{n} hu_if_i$$

(দুয়োফালে N ৰে হৰণ কৰি, a আৰু h ধ্ৰুৱক)

$$\Rightarrow \bar{x} = a + hu.$$

সমান্তৰ মাধ্যৰ গাণিতিক ধৰ্ম ঃ

(1) সমান্তৰ মাধ্যৰপৰা চলকৰ মানবিলাকৰ অন্তৰৰ যোগফল শূন্য। যদি x_iৰ বাৰংবাৰতা f_i হয় $(f_i = 1, 2, \ldots, n)$ তেন্তে

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0.$$

(2) যদি $\bar{x}_1$ আৰু $\bar{x}_2$ যথাক্ৰমে n_1, n_2 সংখ্যক মান থকা দুটা শ্ৰেণীৰ সমান্তৰ মাধ্য হয়, তেন্তে এই শ্ৰেণী দুটাৰ মানবিলাক লগলগালে সংযুক্ত শ্ৰেণীটোৰ সমান্তৰ মাধ্য হ'ব,

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

আদৰ্শ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ আৱশ্যকীয় বৈশিষ্ট্যসমূহ ঃ (প্ৰফেচাৰ য়ুলেৰ মতে)

(1) ইয়াৰ সংজ্ঞা স্পষ্টভাৱে দিব পৰা হ'ব লাগে।

(2) বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ হ'ব লাগে।

(3) সকলো মানৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি নিৰ্ণয় কৰিব পৰা হ'ব লাগে।

(4) গাণিতিকভাৱে সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পৰা হ'ব লাগে।

(5) প্ৰতিচয়ন তাৰতম্য (sampling fluctuation)-ৰ দ্বাৰা অতি কম প্ৰভাৱিত হ'ব লাগে।

(6) খুব সৰু বা ডাঙৰ সংখ্যাৰ দ্বাৰা অতি কম প্ৰভাৱিত হ'ব লাগে (প্ৰফেচাৰ য়ুলে দিয়া নহয়)।

সমান্তৰ মাধ্যৰ সুবিধা আৰু অসুবিধাসমূহ ঃ

সুবিধা ঃ

(1) ইয়াৰ সংজ্ঞা দৃঢ়ভাৱে দিব পাৰি।

(2) ই বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ।

(3) সকলো মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে।

(4) গাণিতিকভাৱে সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পাৰি।

(5) প্ৰতিচয়ন তাৰতম্যৰদ্বাৰা অতি কমকৈ প্ৰভাৱিত হয়।

অসুবিধা ঃ

(1) ই সৰু ৰা ডাঙৰ সংখ্যাৰদ্বাৰা প্ৰভাৱিত হয়।

(2) মুক্ত শ্ৰেণীবিভাগ (10 ত কৈ কম বা 100 তকৈ বেছি) থাকিলে সমান্তৰ মাধ্য উলিওৱাত অসুবিধা হয়।

(3) গুণগত তথ্যৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ মান উলিয়াব নোৱাৰি।

মন্তব্য ঃ সমান্তৰ মাধ্যই আদৰ্শ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ প্ৰায় কেইটা বৈশিষ্ট্যকে সন্তুষ্ট কৰে, গতিকে ইয়াক আদৰ্শ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ বুলি কোৱা হয়।

মধ্যমা (Median) ঃ

কোনো এটা বণ্টনৰ মানসমূহ যেতিয়া উৰ্দ্ধক্ৰম বা অধঃক্ৰমত সজোৱা হয়, মানসমূহৰ মাজৰ ৰাশিটোকেই মধ্যমা বোলে।

অৰ্থাৎ বণ্টনৰ মানসমূহৰ আধামান মধ্যমাত কৈ ডাঙৰ আৰু আধামান সৰু।

বণ্টনৰ মানসমূহৰ মুঠ সংখ্যা অযুগ্ম হ'লে মাজৰ মানটোৱেই মধ্যমা। যেনে—2, 4, 5, 8, 9 ত মধ্যমা 5 অযুগ্ম সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত দুটা মধ্যমান পোৱা যায়। গতিকে মধ্যমান দুটাৰ গড়ক মধ্যমা বুলি ধৰা হয়।

যেনে, 5, 8, 9, 10, 12, 14 ৰ মধ্যমা হ'ব = $\frac{9+10}{2}=\frac{19}{2}=9\cdot5$

বিচ্ছিন্ন বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা উলিয়াবলৈ সঞ্চয় বাৰংবাৰতাৰ প্ৰয়োজন হয়। প্ৰথমে $\frac{N}{2}\left(N=\sum_{i=1}^{n} f_i\right)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। তাৰ পিচত $\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয় বাৰংবাৰতাটো চাব লাগে। ইয়াৰ সাপেক্ষে পোৱা x ৰ মানটোৱেই হ'ব মধ্যমা।

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতাৰ ক্ষেত্ৰত, প্ৰথমে $\frac{N}{2}$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। $\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয় বাৰংবাৰতাৰ সাপেক্ষে পোৱা শ্ৰেণীটোকেই মধ্যমা শ্ৰেণী হিচাপে গণ্য কৰা হয় আৰু *তলত দিয়া সূত্ৰৰ সহায়ত মধ্যমাৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।*

মধ্যমা $= l+\frac{h}{f}\left(\frac{N}{2}-f_0\right)$ $L + \frac{N/2 - F}{fm} \times i$

য'ত l = মধ্যমা শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমা

h = ,, ,, দৈৰ্ঘ্য

f = ,, ,, বাৰংবাৰতা

f_0 = ,, ,, আগৰ শ্ৰেণীৰ সঞ্চয় বাৰংবাৰতা

আৰু $N=\sum f$

মধ্যমাৰ সুবিধাসমূহ ঃ

(1) ইয়াৰ সংজ্ঞাসমূহ দৃঢ়ভাৱে দিব পাৰি।

(2) বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ।

(3) ই চৰম মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

অসুবিধাসমূহ ঃ

(1) ই সকলো মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

(2) গাণিতিকভাৱে ইয়াক সম্প্ৰসাৰণ কৰিব নোৱাৰি।

(3) ই প্ৰতিচয়ন তাৰতম্যৰদ্বাৰা প্ৰভাৱিত হয়।

ব্যৱহাৰ ঃ

(1) গুণগত বৈশিষ্ট্য যেনে—সৌন্দৰ্য্য, বুদ্ধিমাত্ৰা, সাধুতা আদিৰ গড় উলিওৱাত ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

median

উদাহৰণ **1.** তলত দিয়া বণ্টনটোৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণীবিভাগ	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
বাৰংবাৰতা	20	36	44	33	18

প্ৰথমে আমি তলত দিয়া ধৰণে তালিকা প্ৰস্তুত কৰা।

শ্ৰেণীবিভাগ	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয় বাৰংবাৰতা
0—10	20	20
10—20	36	56
20—30	44	100
30—40	33	133
40—50	18	151

$$N = 151$$

ইয়াত, $N = 151$ $\quad \therefore \dfrac{N}{2} = 75{\cdot}5$

$\therefore$ মধ্যমা শ্ৰেণী হ'ল $20-30$

$$\therefore \text{ মধ্যমা } = 20+\frac{30-20}{44}(75{\cdot}5-56)$$

$$= 20+\frac{10}{44}(19{\cdot}5)$$

$$= 20+\frac{5}{22}(19{\cdot}5)$$

$$= 20+4{\cdot}43$$

$$= 24{\cdot}43$$

median

উদাহৰণ 2. তলত দিয়া তালিকাৰপৰা মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা।

আয় (টকাত)	100	150	80	200	250	180
মানুহৰ সংখ্যা	24	26	16	20	6	30

উত্তৰ ঃ প্ৰথমে আয়ৰ টকা উৰ্দ্ধক্ৰমত সজোৱা হ'ল।

আয়	মানুহৰ সংখ্যা	সঞ্চয় বাৰংবাৰতা
80	16	16
100	24	40
150	26	66
180	30	96
200	20	116
250	6	122

$$N = 112$$

$$\therefore \frac{N}{2} = 56$$

56 তকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয় বাৰংবাৰতা হ'ল 66 আৰু ইয়াৰ সাপেক্ষে পোৱা আয় হ'ল 150.

∴ মধ্যমা = 150.

উদাহৰণ 3. তলত দিয়া বাৰংবাৰতা বিভাজনৰপৰা মধ্যমা উলিওৱা। medium

ওজন (কিঃ গ্ৰাঃ ত)	25	26	27	28	29	30	31
ল'ৰাৰ সংখ্যা	4	2	4	7	6	5	5

ওজন (x)	লৰাৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয় বাৰংবাৰতা ($c.f$)
25	4	4
26	2	6
27	4	10
28	7	17
29	6	23
30	5	28
31	5	33

N = 33

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{33}{2} = 16\cdot 5$$

$\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয় বাৰংবাৰতা হ'ল 17

∴ 17 ৰ বাবে পোৱা x ৰ মান হ'ল 28

∴ মধ্যমা = 28

বহুলক (Mode) ঃ কোনো বাৰংবাৰতা বিভাজনত চলকৰ যিটো মান আটাইতকৈ বেছি পোৱা যায়, তাকেই বহুলক বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে, 7, 6, 4, 2, 3, 4, ৰ বহুলক হ'ল 4। বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনত চলকৰ যিটো মান আটাইতকৈ বেছি হয় সেইটোৱেই বহুলক।

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতাত সৰ্ব্বোচ্চ বাৰংবাৰতাৰ বাবে পোৱা শ্ৰেণীটোকেই বহুলক শ্ৰেণী বোলা হয় আৰু তলত *দিয়া সূত্ৰৰ সহায়ত বহুলক নিৰ্ণয় কৰা হয়।*

$$\text{বহুলক} = l + \frac{h(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

য'ত l = বহুলক শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমা

h = বহুলক শ্ৰেণীটোৰ দৈৰ্ঘ্য

f_1 = বহুলক শ্ৰেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_0 = বহুলক শ্ৰেণীৰ ঠিক আগৰ শ্ৰেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_2 = বহুলক শ্ৰেণীৰ ঠিক পিচৰ শ্ৰেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

উদাহৰণ 1. তলত দিয়া তালিকাৰপৰা বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণী	বাৰংবাৰতা
0—5	29
5—10	95
10—15	225
15—20	93
20—25	36
25—30	9
30—35	6
35—40	4
40—45	3
	N = 500

$$\therefore \frac{N}{2} = 250$$

ইয়াত, 10—15 হ'ল বহুলক শ্ৰেণী

$l = 10,\quad f_1 = 225,\quad f_2 = 93,\quad f_0 = 95$

$$\therefore \text{ বহুলক } = 10 + \frac{5 \times (225 - 95)}{2 \times 225 - 95 - 93}$$

$$= 10 + \frac{650}{262} = 10 + 2\cdot48 = 12\cdot48$$

Mode

উদাহৰণ 2. তলত দিয়া তালিকাৰপৰা বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণীবিভাগ	0—7	7—14	14—21	21—28	28—35	35—42	42—49
বাৰংবাৰতা	19	25	36	72	51	43	28

শ্ৰেণী বিভাগ	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয় বাৰংবাৰতা
0—7	19	19
7—14	25	44
14—21	36	80
21—28	72	152
28—35	51	203
35—42	43	246
42—49	28	274

N = 274

$$\text{বহুলক} = l + \frac{h(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

$$= 21 + \frac{7(72-36)}{2\times 72 - 36 - 51}$$

$$= 21 + \frac{252}{57} = 25\cdot 42$$

প্ৰসাৰৰ মাপ (Measures of dispersion) ঃ

কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ সহায়ত আমি বণ্টন এটাৰ মানবিলাক কেনেকৈ কেন্দ্ৰীভূত হয় তাক ক'ব পাৰোঁ। কিন্তু সম্পূৰ্ণ বিভাজন এটাৰ সম্পূৰ্ণ ধাৰণা দিব নোৱাৰোঁ। মানবিলাকৰ প্ৰসাৰণৰ বিষয়ে জানিবলৈ কিছুমান মাপ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

প্ৰামাণিক বিচলন উলিয়াবলৈ আমি প্ৰথমেই চাব লাগিব বণ্টনৰ মানবোৰৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ পৰা কিমান বিচলন হৈছে। বিচলন বিলাকৰ বৰ্গ লৈ তাৰ সমান্তৰ মাধ্য উলিওৱা হয়। এই সমান্তৰ মাধ্যৰ ধনাত্মক মূলেই হ'ল প্ৰামাণিক বিচলন।

যদি $x_1, x_2, x_3 .. x_n$ আদি এটা চলকৰ মান আৰু $\bar{x}$ সমান্তৰ মাধ্য হয়, তেন্তে $(x_i - \bar{x})$ হ'ল বিচলনৰ জোখ।

এতিয়া, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$-ৰ বৰ্গমূল অৰ্থাৎ

$$\sigma = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$ হ'ল প্ৰামাণিক বিচলন।

যদি x_iৰ বাৰংবাৰতা f_i হয়।

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{য'ত} \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

(1) প্ৰামাণিক বিচলনৰ বৰ্গৰ প্ৰসাৰণ (Variance) বোলে।

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

আদৰ্শ প্ৰসাৰণ মাপৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ ঃ

(1) ইয়াৰ সংজ্ঞা দৃঢ়ভাৱে দিব পৰা হ'ব লাগে।

(2) বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ হ'ব লাগে।

(3) সকলো মানৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি উলিয়াব পৰা হ'ব লাগে।

(4) গাণিতিকভাৱে সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰিব লাগে।

(5) প্ৰতিচয়ন তাৰতম্যবদ্বাৰা কম প্ৰভাৱিত হ'ব লাগে।

প্ৰামাণিক বিচলনৰ সুবিধাসমূহ ঃ

(1) ইয়াৰ সংজ্ঞা দৃঢ়ভাৱে দিব পাৰি।

(2) গাণিতিকভাৱে ইয়াক সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।

(3) ই প্ৰতিচয়ন তাৰতম্যৰদ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয়।

অসুবিধাসমূহ ঃ

(1) বুজিবলৈ আৰু গণনা কৰিবলৈ সহজ নহয়।

(2) চৰম মানৰদ্বাৰা প্ৰভাৱিত হয়।

আদৰ্শ প্ৰসাৰণ মাপৰ বেছিভাগ চৰ্তই সন্তুষ্ট কৰা বাবে প্ৰামাণিক বিচলনক আদৰ্শ প্ৰসাৰণৰ মাপ (ideal measure of dispersion) বোলা হয়।

উদাহৰণ 1. তলত দিয়া তালিকাৰপৰা প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

Item	7	9	11	13	15
বাৰংবাৰতা (f)	2	4	8	4	2

(x)	বাৰংবাৰতা (f)	fx	$d=(x-\bar{x})$	$d^2=(x-\bar{x})^2$	fd^2
7	2	14	-4	16	32
9	4	36	-2	4	16
11	8	88	0	0	0
13	4	52	2	4	16
15	2	30	4	16	32

$N = 20$ $\quad = 220$ $\quad \Sigma fd^2 = 96$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i = \frac{1}{20}\times 220 \quad \therefore \ \bar{x} = 11$$

$$\therefore \text{ প্ৰামাণিক বিচলন} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{96}{20}} = 2\cdot 19$$

উদাহৰণ 2. প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণীবিভাগ	0—4	4—8	8—12	12—16
বাৰংবাৰতা (f)	4	8	2	1

	বাৰংবাৰতা (f)	মধ্যমান (x)	$x = \frac{x-6}{4}$	fx	$d = (x-\bar{x})$	$d^2 = (x-\bar{x})^2$	fd^2
0—4	4	2	–1	8	– 4	16	64
4—8	8	6	0	48	0	0	0
8—12	2	10	1	20	4	16	32
12—16	1	14	2	14	8	64	64

N = 15 $\quad \sum f_i x_i = 90 \quad \sum fd^2 = 160$

$$\therefore \; \bar{x} = \frac{1}{N}\sum f_i x_i = \frac{90}{15} = 6$$

প্ৰামাণিক বিচলন $= \sigma = \sqrt{\frac{1}{15}\sum fd^2} = \sqrt{\frac{160}{15}} = \sqrt{10 \cdot 67} = 3 \cdot 27$

তলত দিয়া তালিকাৰপৰা সমান্তৰ Mean মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

নম্বৰ	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60
ছাত্ৰ সংখ্যা	5	10	25	30	20	10

প্ৰথমতে, আমি তলত দিয়া ধৰণে তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰোঁ ঃ

নম্বৰ	ছাত্ৰসংখ্যা (f)	মধ্যমা (x)	$u = \frac{x-35}{10}$	fu
0—10	5	5	–3	–15
10—20	10	15	–2	–20
20—30	25	25	–1	–25
30—40	30	35	0	0
40—50	20	45	1	20
50—60	10	55	2	20

N = 100 $\quad \sum fu = -20$

$$\therefore \; \bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$= 35 + 10 \times \frac{(-20)}{100}$$

$$= 35 - 2$$

$$\bar{x} = 33.$$

Mean

উদাহৰণ 2. তলত দিয়া তালিকাৰপৰা সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

বয়স	0—7	7—14	14—21	21—28	28—35	35—42	42—49
সংখ্যা	19	25	36	72	51	43	28

বয়স শ্ৰেণী বিভাজন	সংখ্যা (f)	মধ্যমান (x)	$u = \frac{x-24\cdot5}{7}$	fu
0— 7	19	3·5	–3	–57
7—14	25	10·5	–2	–50
14—21	36	17·5	–1	–36
21—28	72	24·5	0	0
28—35	51	31·5	1	51
35—42	43	38·5	2	86
42—49	28	45·5	3	84

N = 274 $\sum f_i u_i = -76$ 78

$$\therefore \ \bar{x} = 24\cdot5 + 7\times\frac{76}{274} \qquad 24\cdot5 + \frac{78}{274}\times 7$$

$$= 24\cdot5 + \frac{532}{274} \qquad = 24\cdot5 + \frac{546}{274}$$

$$= 24\cdot5 + 1\cdot94 \qquad = 24\cdot5 + 1\cdot99$$

$$= 26\cdot44. \qquad = 26\cdot49.$$

প্ৰামাণিক বিচলন (Standerd deviation) ঃ

প্ৰথমে ইয়াত সমান্তৰ মাধ্যৰপৰা চলকৰ মানবোৰৰ বিচলন লোৱা হয়। ইয়াৰ পিচত এই বিচলনবিলাকৰ বৰ্গলৈ সেই বৰ্গবিলাকৰ সমান্তৰ উলিওৱা হয়। এই সমান্তৰ মাধ্যৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল ল'লেই তাক প্ৰামাণিক বিচলন বুলি কোৱা হয়।

যদি এটা চলক x-ৰ মান বোৰ $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ হয় তেনেহলে আমি প্ৰথমে বিচলন $(x_i - \bar{x})$, $(i = 1, 2 \ldots\ldots n)$ বোৰ উলিয়াও। তাৰ পিচত $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ উলিয়াই ইয়াৰ বৰ্গমূল ল'লেই আমি প্ৰামাণিক বিচলন (ইয়াক σ ৰে চিহ্নিত কৰা হয়) পাম। এতেকে,

$$\sigma = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

যদি x_i-ৰ বাৰংবাৰতা f_i হয় তেনেহ'লে

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{যত} \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i \ldots\ldots\ldots(i)$$

টোকা ঃ (1) $\sigma^2 = +\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$ ক প্ৰসাৰণ (variance) বোলা হয়।

(2) সৰলীকৰণ ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^2 - \bar{x}^2 2x_i\bar{x})}.$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 . \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x}. \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}$$

(যিহেতু $\bar{x}$ ধ্ৰুৱক ৰাশি)

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 N - 2\,\overline{xx}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

(3) বিচলন বিলাক মাধ্যৰপৰা নলৈ যদি অন্যকোনো মানৰপৰা লোৱা হয়, তেনেহলে প্ৰামাণিক বিচলনক মূল মাধ্য বৰ্গ বিচলন (root mean square deviation) বোলে।

গাণিতিক ধৰ্ম ঃ

(i) প্ৰামাণিক বিচলন মূল বিন্দুৰ পৰিৱৰ্ত্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয় কিন্তু জোখৰ মাপৰ পৰিৱৰ্ত্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, x_i ৰ বাৰংবাৰতা $fi(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$

এতেকে, $$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2} \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} i = 1, 2\ldots\ldots n$$

(a মূলবিন্দু আৰু h জোখৰ মাপ)

বা $x_i = a + hui$

এতেকে, $\bar{x} = a + h\bar{u}$ (সমান্তৰ মাধ্য চোৱা)

এতেকে, (i) ৰ পৰা

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(a + hui - a - hu)^2}$$

$$= h\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(ui - u)^2} \quad ....(ii)$$

এতেকে, $\sigma_x = h\sigma_u$

গতিকে দেখা গ'ল যে মানক বিচলন a ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয় কিন্তু h ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।

(2) যদি দুটা শ্ৰেণীৰ মানৰ সংখ্যা, মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন যথাক্ৰমে n_1, $\bar{x}_1$, σ_1 আৰু n_2, $\bar{x}_2$, σ_2 হয় তেন্তে সংযুক্ত শ্ৰেণীটোৰ প্ৰামাণিক বিচলন হয়

$$\sigma = \left[\frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_1d_1^2 + n_2d_2^2}{n_1 + n_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

য'ত $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$ আৰু $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$; $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

টোকা ঃ (2) ৰ পৰা এইটো স্পষ্ট যে প্ৰামাণিক বিচলক গাণিতিকভাৱে সংম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।

mean s-D

উদাহৰণ 1. ঃ তলত দিয়া বাৰংবাৰতা তালিকাৰপৰা সমান্তৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণীবিভাগ	বাৰংবাৰতা
0— 5	2
5—10	5
10—15	7
15—20	13
20—25	21
25—30	16
30—35	8
35—40	3

সমাধান ঃ ইয়াত আমি তলত লিখা তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰোঁ ঃ

শ্ৰেণীবিভাগ	মধ্যমান x	বাৰংবাৰতা f	$\cancel{u}\,x=\frac{x-22\cdot5}{5}$	$\cancel{fu}$ fx	fu^2 fx^2
0— 5	2·5	2	–4	–8	32
5—10	7·5	5	–3	–15	45
10—15	12·5	7	–2	–14	28
15—20	17·5	13	–1	–13	13
20—25	22·5	21	0	0	0
25—30	27·5	16	1	16	16
30—35	32·5	8	2	16	32
35—40	37·5	3	3	4	27
মুঠ		75		–9	193

মাধ্য $\bar{x} = a + h\bar{u} = 22\cdot5 + \frac{(-9)}{75}\times 5 = 219$

প্ৰামাণিক বিচলন $= h\sqrt{\frac{1}{N}\Sigma u^2 - \tilde{u}^2}$

$= 5\sqrt{\frac{193}{75} - \frac{(-9)^2}{75^2}}$ $= 5\sqrt{2\cdot57 - 0\cdot01}$

$= 80$

প্ৰামাণিক বিচলনৰ দোষ, গুণ ঃ

গুণ ঃ (1) ইয়াৰ সংজ্ঞা দৃঢ়ভাৱে দিব পাৰি।

(2) ই সকলো মানৰ ওপৰতে নিৰ্ভৰশীল।

(3) ইয়াক গাণিতিকভাৱে সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।

(4) ই প্ৰতিচয় তাৰতম্যৰদ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয়।

দোষ ঃ (1) ইয়াক বুজা আৰু নিৰ্ণয় কৰা সহজ নহয়।

(2) মাধ্যৰপৰা বেছি দূৰত থকা মানবিলাকে ইয়াক প্ৰভাৱান্বিত কৰে।

যিহেতু প্ৰামাণিক বিচলনৰ আদৰ্শ প্ৰসাৰণ মাপৰ বেছি ভাগ গুণেই আছে সেয়েহে ইয়াক আদৰ্শ প্ৰসাৰণৰ মাপ (ideal measure of dispersion) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য ঃ প্ৰামাণিক বিচলন ন্যূনতম মূল মাধ্য বৰ্গ বিচলন (Standard deviation is the least root mean square deviation) ঃ—

যদি x_i ৰ বাৰংবাৰতা $f_i(i = 1, 2......n)$ হয় তেনেহ'লে প্ৰামাণিক বিচলন হ'ল

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i = N$$

আৰু মূল মাধ্য বৰ্গ বিচলন σ হ'ল

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$$

[য'ত a যি কোনো এটা ৰাশি]

এতিয়া,

$$\delta^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \bar{a})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\{(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \bar{a})^2 + 2(\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{x} - a)\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(\bar{x} - a)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})$$

$\left[\text{যিহেতু } N = \sum_{i=1}^{n} f_i,\ (\bar{x} - a) \text{ এটা ধ্ৰুৱক}\right]$

$$= \sigma^2 + (\bar{x} - a)^2$$

$\left[\because \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i\bar{x} - a) = 0, \text{ সমান্তৰ মাধ্যৰ ধৰ্ম্ম মতে}\right]$

এতেকে, $\delta^2 \geq \sigma^2$

(যিহেতু $(\bar{x} - a)^2 \geq 0$)

$\rightarrow \delta \geq \sigma$

$\rightarrow \sigma \geq \delta$ এয়ে প্ৰমাণ।

মানক ক্ৰুটি (Standard Error) ঃ

প্ৰতিচয়ন বিচলনৰ বৰ্গমূলকে মানক ক্ৰুটি বোলা হয়।

প্ৰতিচয়ন বণ্টন (Sampling Distribution) ঃ

N সংখ্যক গোট থকা এটা সমষ্টিৰপৰা nটা গোট থকা প্ৰতিদৰ্শ $\binom{N}{n}$ টা পাব পাৰি। এই প্ৰতিদৰ্শৰপৰা আমি বেলেগ বেলেগ প্ৰতিদৰ্শজ (যেনে—গড়, মানক বিচলন) বৰ্ণনা কৰিব

পাৰে। এই প্ৰতিদৰ্শজবোৰৰ মান বেলেগ বেলেগ প্ৰতিদৰ্শত বেলেগ বেলেগ হ'ব। এই প্ৰতিদৰ্শজবোৰৰ বেলেগ বেলেগ মানসমূহ এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত সজাব পাৰি। এই বিভাজন বা বণ্টনখনকে প্ৰতিচয়ন বণ্টন বোলে।

প্ৰতিচয়ন বিচলন (Sampling Variance)ঃ

ধৰা হ'ল T এটা প্ৰতিদৰ্শজ। T ৰ প্ৰসাৰণকে প্ৰতিচয়ন বিচলন (বা প্ৰসাৰণ) বোলে। কোনো প্ৰতিচয়ন বণ্টনৰ প্ৰসাৰণকো প্ৰতিচয়ন প্ৰসাৰণ বোলে।

প্ৰতিদৰ্শ সৰ্ব্বেক্ষণ অভিকল্পনাৰ মূল নীতিসমূহ (Basic Principles of the Design of Sample Survey)ঃ

প্ৰতিদৰ্শ সৰ্ব্বেক্ষণৰ মূল নীতি দুটা হ'ল (1) বৈধতা (Validity) (2) নিয়তন (Optimisation)।
